188. Fandiño Pinilla M. I. (2011). Per una buona didattica è necessario un buon Sapere. *Bollettino dei docenti di matematica*. ISBN: 978-88-86486-82-8. 62, 51-58.

Per una buona didattica è necessario un buon Sapere.
Riflessioni sulla preparazione disciplinare degli insegnanti di matematica, alla luce della ricerca didattica[1]

Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD di Bologna

Summary. *In a period of great success of the didactics of mathematics as a theory of its own, increasingly popular among teachers, it throws a cry of alarm on the pressing need for a real technical training, disciplinary, by teachers of mathematics.*

Nelle ultime decadi si è posta molta attenzione ai problemi che hanno gli studenti quando devono affrontare attività di insegnamento-apprendimento della matematica, il che ha portato, grazie alla ricerca empirica, ad una forma di interpretare la vecchia didattica della matematica dell'insegnare (o Didattica A, *Ars docendi*) come "epistemologia dell'apprendimento" (o Didattica B) (D'Amore, 1999),[2] specifico per la matematica.

In quest'ambito, è stata analizzata la problematica del contratto didattico, forse quella che, tra le altre, ha avuto maggior fortuna non solo per quanto concerne la ricerca, ma anche per le sue lampanti spiegazioni di molti fenomeni precedentemente inspiegabili; la ricerca in questo settore non è affatto sopita, anzi è assolutamente attuale (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sarrazy, 2010). Tra l'altro, è stato recentemente oggetto di studi a carattere sociologico da parte di ricercatori in didattica della matematica che hanno mostrato un

[1] Lavoro eseguito nell'àmbito del PRIN (Programmi di ricerca scientifica di rilevante interesse nazionale) dal titolo: *Insegnare matematica:concezioni, buone pratiche e formazione degli insegnanti*, Anno 2008, n. prot. 2008PBBWNT, Unità locale di Bologna (NRD, Dipartimento di Matematica): *Formare gli insegnanti di matematica*.
[2] A questo testo rinvio per le parole tecniche della didattica della matematica che qui uso senza spiegazione. Trovo sorprendente il fatto che il significato di alcune di esse siano ancora sconosciute ad alcuni insegnanti di matematica. Fortunatamente, sempre meno.

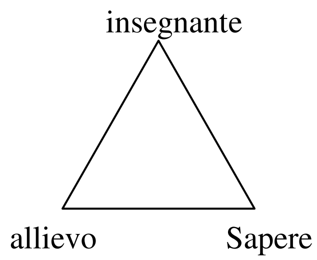
modo diverso da quello classico di interpretare lo stesso fenomeno (Bagni, D'Amore, 2005; D'Amore, 2005; D'Amore, Radford, Bagni, 2006).

Questo successo ha portato a studiare le situazioni adidattiche come quelle che meglio garantiscono un vero apprendimento, profondo e stabile, nel quale si contiene e si argina il malessere generato dal contratto didattico, in opposizione alle situazioni didattiche che di questo si nutrono. L'apparenza immediata è che il successo apprenditivo si ottenga in fretta con le situazioni didattiche, anche grazie a stereotipi che la didattica ha evidenziato. Ma la ricerca ha mostrato quali sono i tremendi "effetti" di queste sull'apprendimento (meglio: sul non apprendimento) degli studenti. E sulle conseguenze delle amare disillusioni degli insegnanti (Brousseau, 2008).

Più in generale, connesse con il fenomeno del contratto didattico, ricerche attuali che si riallacciano a quelle classiche di scuola francese degli anni '70-'80, hanno evidenziato come certe situazioni d'aula si possano interpretare come "scivolamenti didattici", cioè tentativi di imbrigliare in una falsa relazione il Sapere in gioco, le attese dell'insegnante e le (false) attese dello studente; per esempio, il tentativo di illudere lo studente che vi siano metodi algoritmici di risolvere i problemi; o di costringere gli allievi a "risolvere" i problemi per analogia con situazioni simulate fornite a forza dall'insegnante, illudendo tutti (insegnante, allievo, famiglia, società) che vi sia stato apprendimento laddove, di fatto, non c'è (Brousseau, D'Amore, 2008).

Abbiamo appreso a conoscere i diversi ostacoli che si frappongono tra il sapere da apprendere e il sapere disponibile in ciascuno degli studenti (non solo nella zona effettiva, ma soprattutto nella zona di sviluppo prossimale) (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, Sbaragli, 2008).

Abbiamo analizzato e abbiamo appreso ad interpretare, come ricercatori e come docenti attivi e critici, alcuni dei fenomeni di aula attraverso la comoda e duttile metafora schematica del triangolo della didattica (D'Amore, 2001; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2002).



Siamo anche riusciti, grazie a tre psicologi, veri e propri pionieri che hanno dedicato la loro vita allo studio della didattica della matematica, Efraim Fischbein, Gérard Vergnaud e Raymond Duval, a inserire nella nostra disciplina le loro ricerche, e le abbiamo inglobate in essa, mescolandole con riflessioni di carattere matematico (D'Amore, 1999).

In particolare, abbiamo capito che gli studenti affrontano grandi temi della matematica con immagini e talvolta modelli non corretti che hanno costruito nei livelli scolastici precedenti e che dovrebbero ancora essere in processo di formazione; questi modelli scorretti sono non congruenti alle attese dell'insegnante, quando l'insegnante è preparato; e questa incoerenza genera situazioni d'aula che, prima o poi, finiscono con lo sfuggire dalle mani del docente, mani professionali sì, ma non demiurgiche. Altre volte capita che il modello scorretto sia stato proposto dallo stesso insegnante, dunque l'insegnante lo accetta, lo riconosce come congruente al proprio, ma siamo fuori dal Sapere.
Per esempio, quando si propone allo studente che le rette del piano possono essere verticali, orizzontali o oblique; questo curioso modello di localizzazione delle rette è spesso proposto dallo stesso insegnante e fatto proprio come naturale dallo studente, c'è coerenza. Ma si tratta di un modello sbagliato; va bene per tracce sul foglio da disegno, fornito di bordi ai quali fare riferimento, ad una direzione privilegiata rispetto alla pagina di un libro, orientata nel senso della lettura; ma è assolutamente fuor di luogo rispetto al piano, stante la sua illimitatezza, dunque alla mancanza di "bordi" cui fare riferimento.
O quando si dice che 1 è l'elemento neutro della moltiplicazione dato che, se a è un qualsiasi numero naturale, $a\times1=a$. Questa falsa giustificazione renderebbe allora lo zero elemento neutro della sottrazione dato che, se a è un qualsiasi numero naturale, $a\text{-}0=a$. Ma questo è falso, la sottrazione non ha elemento neutro; è pur vero che $a\text{-}0=a$, ma $0\text{-}a\neq a$, in generale (vale solo quando a è proprio 0). Per la moltiplicazione, sì, 1 è elemento neutro dato che $a\times1=a=1\times a$, ma non per il motivo addotto.

Abbiamo tutti appreso a studiare con profondità sempre maggiore la problematica della rappresentazione semiotica e la stretta necessità di collegarla alla noetica. Studiando l'epistemologia della matematica e la sua didattica, abbiamo capito a fondo la massima duvaliana: *Non c'è noetica senza semiotica*.

In innumerevoli occasioni abbiamo avuto modo di discutere con i docenti di tutto il mondo delle loro stesse convinzioni e di come esse influenzano l'attività di aula (Didattica C: l'epistemologia dell'insegnante) (D'Amore, 2006; Campolucci, Fandiño Pinilla, Maori, Sbaragli, 2006). E di come cambiano le convinzioni a fronte dell'aumento delle specifiche preparazioni nei campi della matematica, della sua didattica, della sua epistemologia (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004).

Questo fatto determina, tra l'altro, la capacità di motivare e il risultato volitivo da parte degli studenti. Va sempre ricordato che motivazione e volizione sono le due facce opposte di quella stessa medaglia che è il fare d'aula. Spetta all'insegnante motivare; ma se lo studente non accende e mette in moto la sua propria personale volizione, non c'è nulla da fare, il fare d'aula non decolla (Pellerey, 1993; D'Amore, 1999).

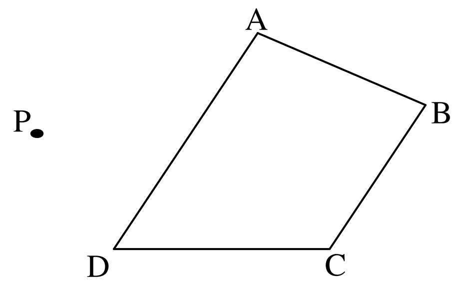
Tuttavia, proprio il rapporto sempre più stretto e confidenziale con gli insegnanti (in occasione di ricerche e corsi) ha mostrato che capita, talvolta, che si tenga in grande conto la didattica, ma per insegnare un concetto a monte, di carattere matematico, relativo dunque al Sapere, non corretto; o un algoritmo che a noi stessi sfugge almeno in parte; o in un linguaggio che non dominiamo; o spronando ad affrontare un problema rispetto al quale noi stessi non siamo certi di essere in grado di poter orientare verso una strategia risolutiva gli allievi, a parte le frasi normative che lasciamo il tempo che trovano. D'altra parte, le misconcezioni presenti talvolta in alcuni insegnanti sono state oggetto di profondo studio da parte di diversi ricercatori (Sbaragli, 2004, 2005; D'Amore, Sbaragli, 2005; D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005; D'Amore, 2007, Sbaragli S., Arrigo G., D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Frapolli A., Frigerio D., Villa O., 2011.

In questi casi, è ovvio, quel che si ottiene è un linguaggio non corretto, un concetto sbagliato, una strategia inefficace, un algoritmo non consono. Lo studente impara da noi, impara perfettamente, ma impara qualche cosa che non è quella corretta, dal punto di vista del Sapere (Fandiño Pinilla, 2006a).

Riflettiamo sul sapere del docente; è necessario, non dimentichiamolo, non diamolo per scontato. Nella maggior parte dei casi, la trasposizione didattica ci dovrebbe spingere a far sì che il risultato del processo di insegnamento-apprendimento porti lo studente a farsi un'immagine instabile e debole, non un modello stabile e forte. In particolare, la funzione dei saperi nella scuola primaria, deve sempre essere pensata come una base per saperi o apprendimenti futuri.

L'area delle figure piane dovrà portare un giorno allo studio degli integrali; non si completa con quattro banali formule mal imparate a memoria che fanno confondere l'idea di superficie con quella di area (Fandiño Pinilla, D'Amore, 2006).

L'infinità dei numeri naturali non deve essere confusa con la loro illimitatezza; questa confusione porta spesso a pensare che in un segmento, in quanto limitato, c'è una quantità finita di punti e che tale quantità dipende dalla lunghezza del segmento stesso e che solo la retta contenga infiniti punti.
Una decente argomentazione, in dipendenza dell'età dell'allievo e del suo grado scolastico, deve portare un giorno ad una buona, corretta, coerente dimostrazione.
L'idea di infinità dei numeri naturali insieme alle opportune relazioni d'ordine dovrà portare alla densità dei numeri razionali e poi alla continuità dei numeri reali; sappiamo per certo, dai risultati della ricerca, che la maggioranza degli studenti non costruisce l'idea di densità in Q; una minima parte quella di continuità in R; molti le confondono o, per lo meno, non le distinguono (Arrigo, D'Amore, 1999, 2002).
Dal numero naturale, per gradi, si deve arrivare alla costruzione dei numeri complessi; il che, se non ben condotto, è un abisso, preda com'è di ostacoli epistemologici e didattici (Bagni, 1997).
Il conteggio dei numeri naturali a uno a uno, a due a due, o secondo certe regole, dovrà portare allo studio delle successioni; lo studio di successioni come ½, 1/3, ¼, ... deve culminare nello studio dei limiti.
Bisogna molto stare attenti al linguaggio; è vero che, nella scuola primaria, non occorre sviluppare troppo un linguaggio specialistico raffinato, dato che l'età dei discenti non lo permette e anche perché, onestamente, non sembra necessario: il linguaggio naturale quotidiano ha già in sé tutte le potenzialità necessarie; però bisogna stare attenti; molti confondo infinito con illimitato, molti pensano che, siccome un angolo è "interno" a un poligono, allora smetta di essere illimitato e diventi limitato. Detto in alte parole, la ricerca ha mostrato che quasi nessuno studente e ben pochi insegnanti sono disposti ad ammettere che il punto P appartenga all'angolo ABC, interno al poligono ABCD.



Le frazioni non sono fini a sé stesse; devono portare alla costruzione dei numeri razionali (Fandiño Pinilla, 2005).

Dobbiamo indurre gli insegnanti di scuola primaria a pensare mille volte prima di usare espressioni tanto diffuse come “i solidi che rotolano” in luogo di “solidi di rotazione”; o di fare riferimento alla “forma dei punti”: il punto è un oggetto geometrico di dimensione zero, dunque non può avere una forma. Eccetera.

Però, se il docente non lo sa, se non conosce questi temi del Sapere, perché la sua conoscenza matematica non è stata strutturata in questo senso; se il suo sapere da insegnare coincide con il Sapere, non potrà neppure realizzare una trasposizione didattica e così finirà con l’insegnare quel che sa, come lo sa, al limite delle proprie competenze e, purtroppo, trascinando nell’insegnamento eventuali errori che non è in grado di dominare e di eliminare.

Per esempio, nella sua lunga vita scolare, lo studente impara nelle primarie l’addizioni tra numeri naturali (spesso banalmente ed erroneamente confusa con l’attività pratica corporea empirica dell’unione, del mettere insieme, un modello intuitivo che non basta a garantire l’apprendimento di tale operazione); incontra poi l’addizione tra numeri con la virgola, tra frazioni, tra numeri razionali, interi e reali; e già siamo nel complicato, perché ci è capitato di sentire varie giustificazioni “naturali” (appunto), al fatto che $\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{5}$; poi appare l’addizione in algebra che spesso, anzi assai spesso, è un’operazione indicata ma non effettuata (l’addizione tra a e b non è c, come dice qualche studente, ma è a+b, punto e basta); poi arriva l’addizione tra vettori, l’addizione tra monomi per dar luogo ai polinomi, quella tra polinomi, quella tra matrici, quella tra numeri complessi, quella tra funzioni, quella dell’algebra di Boole eccetera. Eppure, se dopo 13 anni di scolarità completa si chiede ad uno studente che cosa è l’addizione, riemerge quella della scuola primaria, l’unica ad aver lasciato un segno (evidentemente modello e non solo immagine). La domanda, relativamente alla problematica che sto facendo emergere qui, è la seguente: quanti insegnanti di scuola primaria sanno della potenziale evoluzione, della necessaria evoluzione, del concetto di addizione? Cioè: quanti credono che nel Sapere l’addizione si limita a quella enunciata e proposta nel primo anno di scolarità?
Lo stesso vale per le altre operazioni e per molte altre questioni. Molti studenti, anche di corsi avanzati, e alcuni insegnanti identificano le operazioni binarie definibili sui diversi sistemi numerici con le quattro operazioni razionali elementari apprese nella scuola primaria. Senza scomodare insiemi numerici più complicati o raffinati, anche solo rimanendo in N, se si cerca di far capire che le operazioni binarie definibili in N non sono quattro, ma infinite [anzi, in un certo senso, più che *infinite* (ma questa affermazione la capiscono davvero in pochi)], si vedono volti stupiti ed increduli.

Dobbiamo essere perfettamente consapevoli dell'assoluta necessità di una preparazione disciplinare di base.

Da questo punto di vista, assume particolare rilievo una diabolica domanda che possiamo tutti porci; di fronte ad un tema di matematica di quelli usuali nella scuola militante tradizionale o non, è bene, di tanto in tanto chiederci: Perché si insegna questo tema? O, nella versione preferita da bambini e dagli adolescenti: A che cosa serve?
Perché insegniamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione? A che cosa serve?
Perché insegniamo il massimo comun divisore? A che cosa serve? Davvero il minimo comune multiplo è necessario per eseguire l'addizione tra frazioni?
Perché insegniamo i logaritmi? A che cosa serve?
Le risposte possono essere intrinseche alla matematica stessa: per raggiungere certe "competenze in matematica", questi temi sono necessari; o possono trovare risposte esterne alla matematica, per costruire quella che altrove ho chiamato "competenza matematica" (D'Amore, Godino, Arrigo, Fandiño Pinilla, 2003; Fandiño Pinilla, 2006b).

Se questi temi trovano riscontro positivo nei due settori, bene; se lo trovano in uno solo dei due, bene; se non lo trovano in nessuno dei due, probabilmente, davvero, quel tema "non serve a nulla" (parafrasando il fortunato libro vincitore di premi di Bolondi e D'Amore, 2010); in tal caso possiamo prendere in esame la possibilità di farne a meno, lasciando libero posto a qualche cosa che merita più attenzione. Se proseguiamo a volerlo immettere nel curricolo, questo potrebbe essere un indice di Sapere non ben costruito, potrebbe essere indicativo del fatto di non essere in grado di compiere scelte consapevoli e mature, potrebbe voler significare che siamo succubi del curricolo e non riusciamo a pensare che il curricolo è lui uno strumento nelle nostre mani e non viceversa (Fandiño Pinilla, 2002).

Tutto ciò dipende da una efficace e profonda, significativa e consapevole costruzione del Sapere.

Riferimenti bibliografici

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo, ma non ci credo". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D’Amore B. (2002). “Lo vedo ma non ci credo…”, seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-57.

Bagni G.T. (1997), Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore, *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.

Bagni G.T., D’Amore B. (2005). Epistemologia, sociologia, semiotica: la prospettiva socio-culturale. *La matematica e la sua didattica.* 1, 73-89.

Bolondi G., D’Amore B. (2010). *La matematica non serve a nulla*. Bologna: Compositori.

Brousseau G. (2008). *Ingegneria didattica ed epistemologia della matematica*. A cura di Bruno D’Amore. Bologna: Pitagora.

Brousseau G., D’Amore B. (2008). I tentativi di trasformare analisi di carattere meta in attività didattica. Dall’empirico al didattico. In: D’Amore B., Sbaragli F. (eds.) (2008). *Didattica della matematica e azioni d’aula*. Atti del XXII Convegno Nazionale: Incontri con la matematica. Castel San Pietro Terme, 7-8-9 novembre 2008. Bologna: Pitagora. 3-14.

Campolucci L., Fandiño Pinilla M.I., Maori D., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

D’Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Edizione 2010].

D’Amore B. (2001). Il “triangolo” allievo-insegnante-sapere in didattica della matematica. *L’educazione matematica*. 3, 2, 104-113.

D’Amore B. (2005). Pratiche e metapratiche nell’attività matematica della classe intesa come società. Alcuni elementi rilevanti della didattica della matematica interpretati in chiave sociologica. *La matematica e la sua didattica.* 3, 325-336.

D’Amore B. (2006). Didattica della matematica “C”. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent’anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 93-96.

D’Amore B. (2007). Lo zero, da ostacolo epistemologico a ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica*. Vol. 21, n° 4, 425-454.

D’Amore B., Fandiño Pinilla MI. (2002). Un acercamiento analitico al “triángulo de la didáctica”. *Educación Matemática*. México DF, México. 14, 1, 48-61.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sarrazy B. (2010). *La didattica della matematica: gli “effetti” del contratto*. Prefazione e postfazione di Guy Brousseau. Bologna: Archetipolibri.

D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *La didattica e le difficoltà in matematica*. Trento: Erickson.

D’Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

D’Amore B., Radford L., Bagni GT. (2006). Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 29B, 1, 11-40.

D’Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell’idea di “misconcezione”. *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Fandiño Pinilla M.I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M.I. (2006a). Trasposizione, ostacoli epistemologici e didattici: quel che imparano gli allievi dipende da noi. Il caso emblematico di frazioni, area e perimetro. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La matematica e la sua didattica, vent’anni di impegno*. Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme (Bo), 23 settembre 2006. Roma: Carocci. 117-120.

Fandiño Pinilla M.I. (2006b). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. Numero speciale: D’Amore B. (ed.). *Matematica: l’emergenza della didattica nella formazione*. Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana. 21-28.

Fandiño Pinilla M.I., D’Amore B (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici*. Trento: Erickson.

Pellerey M. (1993), Volli, sempre volli, fortissimanente volli. *Orientamenti pedagogici*, 6, 1005-1017.

Sbaragli S. (2004). *Le convinzioni degli insegnanti sull’infinito matematico*. Tesi di Dottorato. Università di Bratislava. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm.

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni “inevitabili” e misconcezioni “evitabili”. *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.

Sbaragli S., Arrigo G., D’Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Frapolli A., Frigerio D., Villa O. (2011). Epistemological and Didactic Obstacles: the influence of teachers’ beliefs on the conceptual education of students. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 10, 1, 61-102.